

ЗА ОДЕЉЕЊА  $I_1$  И  $I_4$  ЗА ПЕРИОД 30.3 - 3.4.

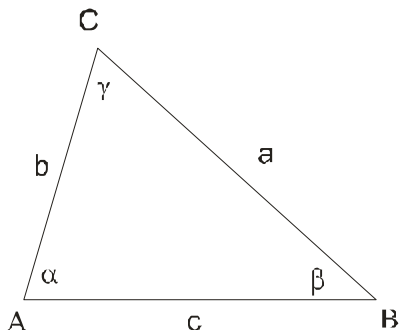
### Додатни задатак:

- [1] У троуглу  $ABC$  је  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2$ .  
Наћи остале углове троугла.
- [2] Ако је у троуглу  $ABC$ :  $a + c = 11$ ,  $B = 30^\circ$  и  $P = 7$ , израчунати дужине страница троугла.
- [3] Нека је у троуглу  $ABC$ :  $c = 2$ ,  $a : b = \sqrt{7} : 3$  и  $\alpha = 60^\circ$ . Израчунати странице троугла.

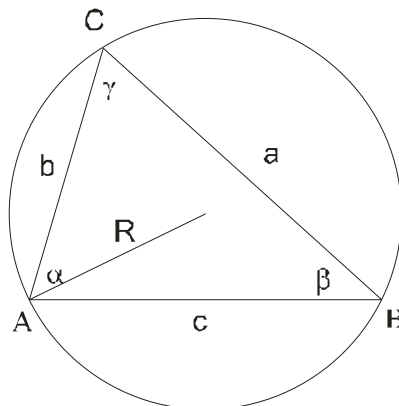
## SINUSNA I KOSINUSNA TEOREMA REŠAVANJE TROUGLA

### Sinusna teorema glasi:

Stranice trougla proporcionalne su sinusima njima naspramnih uglova.(slika 1)



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Odnos dužine stranica i sinusa naspramnog ugla trougla je konstanta i jednak je dužini prečnika (2R) kružnice opisane oko trougla.(slika 2)

### Sinusna teorema se primenjuje:

- 1) Kada su data dva ugla i jedna stranica
- 2) Kada se date dve stranice i ugao naspram jedne od tih stranica

### Kosinusna teorema glasi:

Neka su  $a, b, c$  dužine stranica i  $\alpha, \beta, \gamma$  veličine odgovarajućih unutrašnjih uglova trougla ABC. Tada je:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

### Kosinusna teorema se primenjuje:

- 1) Kad su date dve stranice i ugao izmedju njih
- 2) Kad su date sve tri stranice trougla

Još neke važne "stvari" koje se izводе iz sinusne i kosinusne teoreme su:

→ Površina trougla je:  $P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$

$$P = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

→ Površina trougla je  $P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ ,  $R$  je poluprečnik opisane kružnice i  $P = r \cdot s$  gde

je  $s = \frac{a+b+c}{2}$  poluobim a  $r$  je poluprečnik upisane kružnice

→ Težišne linije se izračunavaju:  $t_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$

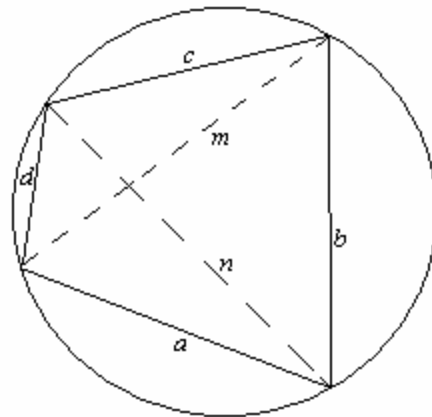
$$t_b = \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{2}$$

$$t_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

→ Proizvod dijagonala tetivnog četvorougla (oko koga može da se opiše kružnica) jednak je zbiru proizvoda naspramnih strana.

$$m \cdot n = ac + bd$$

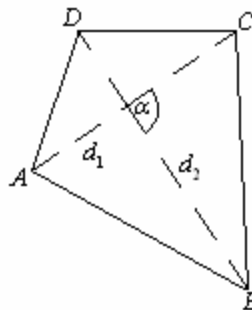
Ptolomejeva teorema



→ Ako su  $d_1$  i  $d_2$  dijagonalne konveksnog četvorougla i  $\alpha$  ugao koji one grade.

Površina tog četvorougla je:

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \alpha$$



### Primeri

1) U trouglu ABC dato je  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  i poluprečnik opisanog kruga  $R = 2\sqrt{6}$ .  
Odrediti ostale osnovne elemente bez upotrebe tablica.

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$R = 2\sqrt{6}$$

Najpre ćemo naći ugao  $\gamma$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ)$$

$$\gamma = 75^\circ$$

Iskoristićemo sinusnu teoremu  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \alpha} = 2R &\Rightarrow a = 2R \sin \alpha \\ a &= 2 \cdot 2\sqrt{6} \sin 45^\circ \\ a &= 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3} \\ a &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{b}{\sin \beta} = 2R &\Rightarrow b = 2R \sin \beta \\ b &= 2 \cdot 2\sqrt{6} \sin 60^\circ \\ b &= 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{3} \\ b &= 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{c}{\sin \gamma} = 2R &\Rightarrow c = 2R \sin \gamma \\ c &= 2 \cdot 2\sqrt{6} \sin 75^\circ \\ c &= 4\sqrt{6} \cdot \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ c &= 4\sqrt{6} \cdot (\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ) \\ c &= 4\sqrt{6} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 4\sqrt{6} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} \right) \\ c &= 2(3 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

2) Odrediti stranicu  $b$  trougla ABC ako su njegove stranice  $a = 2\sqrt{3}cm, c = \sqrt{6}cm$  i ugao  $\beta = 105^\circ$

$$a = 2\sqrt{3}cm$$

$$c = \sqrt{6}cm$$

$$\beta = 105^\circ$$

---


$$b = ?$$

Ovde ćemo upotrebiti kosinusnu teoremu!

Od tri jednakosti izaberemo onu u koju imamo najviše podataka da zamenimo.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Ajmo prvo da nađemo  $\cos 105^\circ$

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4} \end{aligned}$$

Sad kosinusna teorema:

$$b^2 = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6(1 - \sqrt{3})$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6 + 6\sqrt{3}$$

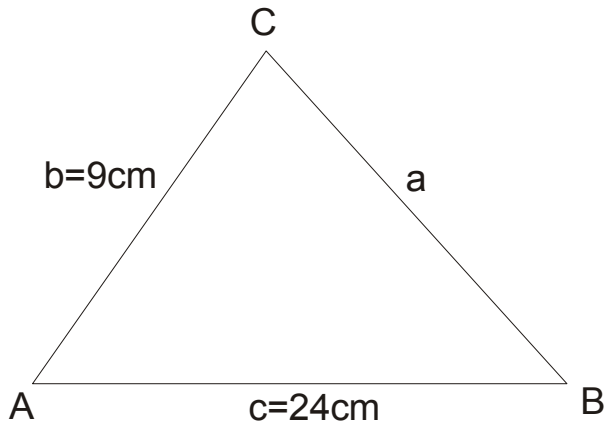
$$b^2 = 12 + 6\sqrt{3} \rightarrow \text{mali trik}$$

$$b^2 = (3 + \sqrt{3})^2$$

$$b = 3 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 12 + 6\sqrt{3} &= (3 + \sqrt{3})^2 \rightarrow \text{proverimo} \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{3} + 3 \\ &= 12 + 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

3) U trouglu ABC dato je  $AB=24\text{cm}$ ,  $AC=9\text{cm}$  i ugao  $\alpha = 60^\circ$ . Odrediti bez upotreba tablica, stranicu BC i poluprečnik opisane kružnice.



$$\begin{aligned}
 b &= 9\text{cm} \\
 c &= 24\text{cm} \\
 \alpha &= 60^\circ \\
 \hline
 a &= ?, R = ?
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\
 a^2 &= 9^2 + 24^2 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ \\
 a^2 &= 81 + 576 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \\
 a^2 &= 441 \\
 a &= \sqrt{441} \\
 a &= 21\text{cm}
 \end{aligned}$$

Sad iskoristimo sinusnu teoremu:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{\sin \alpha} &= 2R \Rightarrow \frac{21}{\sin 60^\circ} = 2R \\
 \frac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= 2R \\
 2R &= \frac{42}{\sqrt{3}} \\
 R &= \frac{21}{\sqrt{3}} \text{ racionališemo} \\
 R &= \frac{21}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
 R &= \frac{21\sqrt{3}}{3} \\
 R &= 7\sqrt{3}\text{cm}
 \end{aligned}$$

4) U trouglu ABC razlika stranica  $a$  i  $b$  jednaka je 3cm ugao  $\gamma = 60^\circ$  i poluprečnik opisane kružnice  $R = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ . Odrediti stranice trougla ABC.

$$a - b = 3 \text{ cm}$$

$$\gamma = 60^\circ$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$a, b, c = ?$$

Iskoristimo sinusnu teoremu da nadujemo dužinu stranice  $c$ .

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sin \gamma} = 2R &\Rightarrow c = 2R \sin \gamma \\ c &= 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 60^\circ \\ c &= 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c &= 7 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dalje koristimo kosinusnu teoremu:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ 7^2 &= (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3) \cos 60^\circ \\ 49 &= (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3) \cdot \frac{1}{2} \\ 49 &= b^2 + 6b + 9 + b^2 - b^2 - 3b \\ b^2 + 3b - 40 &= 0 \rightarrow \text{kvadratna jednačina "po b"} \\ b_{1,2} &= \frac{-3 \pm 13}{2} \\ b_1 &= 5 \\ b_2 &= -8 \rightarrow \text{ovo nije rešenje jer ne može dužina stranice da bude negativan broj.} \end{aligned}$$

Dakle  $b = 5$

$$\begin{aligned} a &= b + 3 \\ a &= 5 + 3 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

5) U krugu su date tetive  $AB=8\text{cm}$  i  $AC=5\text{cm}$ . One grade medjusobni ugao  $\alpha = 60^\circ$ .

Izračunati poluprečnik opisane kružnice.

Rešenje:

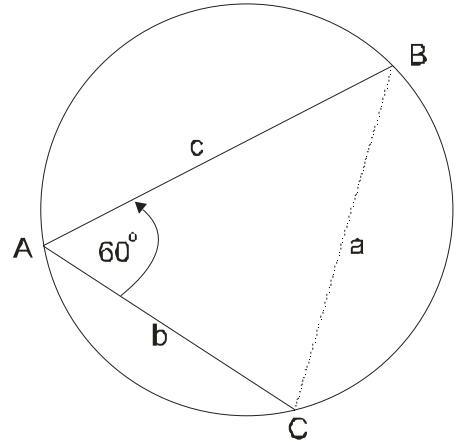
$$b = 5\text{cm}$$

$$c = 8\text{cm}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

---


$$R = ?$$



Najpre iz kosinusne teoreme nadjemo dužinu stranice  $a$ .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 89 - 40$$

$$a^2 = 49$$

$$a = 7\text{cm}$$

Iz sinusne teoreme nadjemo traženo  $R$ .

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$2R = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$R = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

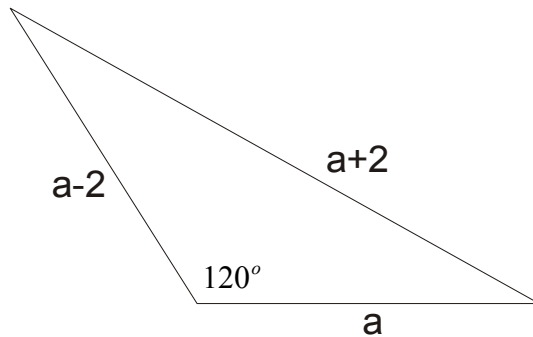
$$R = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



6) Ako su stranice trougla  $a-2, a, a+2$  i jedan ugao iznosi  $120^\circ$ , odrediti stranice.

Rešenje:



$$a = a$$

$$b = a - 2$$

$$c = a + 2$$

**Pazi:**  $120^\circ$  je ugao naspram najveće stranice ( $a+2$ )

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 - 2a(a-2) \cos 120^\circ$$

$$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 - 2a(a-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 + a(a-2)$$

$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2a$$

$$0 = 2a^2 - 10a$$

$$2a(a-5) = 0$$

$$a = 0 \rightarrow \text{nemoguće}$$

$$a = 5$$

Sad se vratimo da nadujemo ostale dve stranice....

$$b = a - 2 = 5 - 2 = 3$$

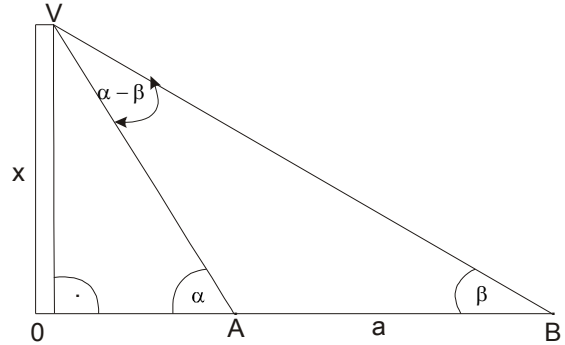
$$b = 3$$

$$c = a + 2$$

$$c = 7$$

7) Ozračinati visinu fabričkog dimnjaka koji se nalazi na horizontalnom nepristupačnom tlu, ako se vrh dimnjaka iz tačke A vidi pod uglom  $\alpha$ , a iz tačke B pod uglom  $\beta$ . Tačke A i B pripadaju takodje horizontalnoj ravni a njihovo rastojanje  $AB = a$ . Osa dimnjaka i tačke A i B leže u istoj ravni.

Ovde je najvažnije skicirati problem!!!



Obeležimo traženu visinu sa  $OV = x$

Prvo nadjemo nepoznate uglove  $\angle OVA$  i  $\angle AVB$

$$\left. \begin{aligned} \angle OVA &= 90^\circ - \alpha \\ \angle OVB &= 90^\circ - \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \angle AVB &= \angle OVB - \angle OVA \\ &= (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) \\ &= 90^\circ - \beta - 90^\circ + \alpha \\ \angle AVB &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

Primenimo sinusnu teoremu na trougao ABV

$$\frac{a}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{AV}{\sin \beta} \Rightarrow AV = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

sad primenjujemo definiciju sinusa na pravougli trougao VOA.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x}{AV} \Rightarrow x = AV(\sin \alpha) \\ x &= \frac{a \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \\ x &= \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

8) U trouglu ABC dato je  $a - b = 1$ ,  $h_c = \frac{3}{2}$ ,  $R = 4$ . Bez upotreba tablica izračunati  $\alpha$ .

$$a - b = 1$$

$$h_c = \frac{3}{2}$$

$$R = 4$$

$$\alpha = ?$$

Najpre ćemo upotrebiti obrasce za površinu trougla:

$$P = \frac{c \cdot h_c}{2}, \quad P = \frac{abc}{4R}$$

Dakle:  $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{abc}{4R}$

$$2ab = 4Rh_c$$

$$ab = 2Rh_c$$

$$ab = 2 \cdot 4 \cdot h_c$$

$$ab = 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2}$$

$$ab = 12$$

Sada napravimo sistem:

$$a - b = 1$$

$$ab = 12$$

$$a = b + 1$$

$$b(b + 1) = 12$$

$$b^2 + b - 12 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$b_1 = 3$$

$$b_2 = -4 \text{ Nemoguće}$$

Dakle  $b = 3 \Rightarrow a = 3 + 1 = 4 \Rightarrow a = 4$

Dalje iskoristimo sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

Znamo da je  $\alpha = 30^\circ$  jer je  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

**Rešenje je  $\alpha = 30^\circ$**

**9) Odrediti stranice trougla površine  $P = 3\sqrt{3}$ , ako je ugao  $\alpha = 60^\circ$  i zbir stranica koje zahvataju dati ugao  $b + c = 7$**

$$P = 3\sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$b + c = 7$$

$$a, b, c = ?$$

Ovde ćemo iskoristiti obrazac za površinu trougla:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

$$3\sqrt{3} = \frac{1}{2}bc \sin 60^\circ$$

$$3\sqrt{3} = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$bc = 12$$

Dalje ćemo oformiti sistem jednačina:

$$b + c = 7$$

$$bc = 12$$

Izrazimo  $c = 7 - b$  i zamenimo u  $bc = 12$

$$c = 7 - b$$

$$b \cdot (7 - b) = 12$$

$$7b - b^2 = 12$$

$$b^2 - 7b + 12 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$b_1 = 4 \Rightarrow c = 3$$

$$b_2 = 3 \Rightarrow c = 4$$

Znači imamo dve mogućnosti:

$$b_1 = 4, c = 3 \quad \text{ili} \quad b_2 = 3; c = 4$$

Upotrebimo sad kosinusnu teoremu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$$

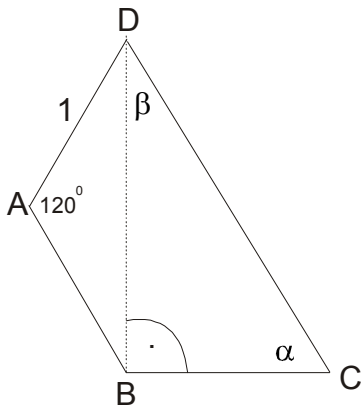
$$a^2 = 25 - 12$$

$$a^2 = 13$$

$$a = \sqrt{13}$$

**10) U tetivnom četvorouglu ABCD dijagonala BD je normalna na stranicu BC, ugao ABC= 120°, ugao BAD= 120°, DA=1. Izračunati dijagonalu BD i stranicu CD**

Odavde je vrlo važno nacrtati skicu i postaviti problem, rešenje zatim dolazi samo po sebi:



Pošto je  $\angle ABC = 120^\circ$  i  $BD \perp BC \Rightarrow \angle ABD = 30^\circ$  a kako je  $\angle BAD = 120^\circ \Rightarrow \angle ADB = 30^\circ$  naravno trougao ABD je jednakokraki  $\Rightarrow AB = 1$  a onda nije teško naći DB

$$DB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \rightarrow \text{Kosinusna teorema}$$

$$DB^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$DB^2 = 3$$

$$DB = \sqrt{3}$$

**Pošto se radi o tetivnom četvorouglu, zbir naspramnih uglova je isti!**

$$120^\circ + \alpha = 120^\circ + \beta + 30^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ + \beta \quad \text{i važi još } \alpha + \beta = 90^\circ \text{ pa je :}$$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$$

Primenimo definiciju:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{CD}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{CD}$$

$$CD = 2$$